

# Modelización del flujo en acuífero confinado sin discretización temporal

M. F. Andrés †

Departamento de Geología. Universidad de Salamanca. Av. De la Merced s/n. 37008. Salamanca. España.

† Fallecido en abril de 2008

## RESUMEN

Se presenta un programa interactivo para el modelado del flujo en acuífero confinado, homogéneo o heterogéneo (MGAC). La ecuación a partir de la cual se elabora el programa, es la obtenida al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial de flujo en las dos direcciones del plano. El acuífero se discretiza espacialmente en celdas cuadradas y se plantea el sistema de ecuaciones transformadas en forma de diferencias finitas, no estando presente la variable tiempo. Para la solución del sistema se utiliza el método de SOR. La solución que se obtiene es invertida numéricamente para obtener los valores de los descensos,  $s$ , en vez de sus transformadas,  $\tilde{s}$ , y para recuperar la variable tiempo en vez del parámetro de inversión  $p$ . El método de inversión utilizado es el de Stehfest (1970). La aplicación del tiempo es de una vez y en su totalidad, por lo que los modelos no requieren discretización temporal. El uso del método de Stehfest conlleva un error para valores de  $Tt/r^2S$  pequeños. La validez de este método se aproxima para acuífero confinado homogéneo mediante la comparación de los valores a los que se llega con la inversión de la expresión analítica transformada de la ecuación de Theis y los de la propia expresión de Theis. También se comparan los resultados obtenidos analíticamente con los de un modelo de acuífero genérico. Se reseñan los errores por truncación y las limitaciones originadas al no poder considerar con precisión los potenciales iniciales o fijos reales en régimen transitorio. Se muestran los tiempos de computación y la memoria requerida para distintos ejemplos.

Palabras clave: acuífero confinado, agua subterránea, modelo de flujo, Stehfest, transformada de Laplace

## ***Confined aquifer flow modeling without temporary discretization***

### ABSTRACT

*A interactive program for flow modeling in confined homogeneous or heterogeneous aquifer is presented (MGAC). The equation from which the program has been elaborated is the one obtained by applying the Laplace transform to the differential flow equation on the two directions of the plane. The models spatially discretize the aquifer in square cells and pose the system of transformed equations in the form of finite differences, the time variable not being present. The SOR method is used to solve the system. The solution obtained is numerically inverted to obtain the values of the drawdown,  $s$ , instead of their transform,  $\tilde{s}$ , and to recover the time variable instead of the inversion parameter  $p$ . The inversion method used is that of Stehfest (1970). The application of time is performed once and in its totality, so that the models do not need time discretization. The use of the Stehfest method entails an error for small values of  $Tt/r^2S$ . The validity of the method for homogeneous confined aquifer is approximated by comparing the values obtained with the inversion of the transformed analytic Theis equation and the own Theis expression. The analytical results are also compared with those obtained for a generical model. The truncation errors and the limitations originated by the lack of precision in the initial potentials or in the fixed real potentials in transient flow are reviewed. The required memory and the computer times for different examples are shown.*

*Key words: confined aquifer, flow model, groundwater, Laplace transform, Stehfest*

## Introducción

Los modelos matemáticos de flujo de agua subterránea se han desarrollado mediante el tratamiento con diferencias o elementos finitos, entre otros métodos, de la ecuación diferencial que lo describe, necesitando de la discretización del espacio y del tiempo para su solución, lo que introduce errores en el proceso.

En lo que concierne a la discretización temporal se produce una imprecisión en cada paso de tiempo y requiere de memoria, almacenamiento y tiempo de ordenador acorde con el tamaño del sistema de ecuaciones,

que se multiplica con el número de intervalos considerado.

Si los modelos de flujo se requieren para la construcción de modelos de gestión hídrica, constituidos por el ensamblado de un modelo de flujo y un algoritmo de optimización, los requisitos de ordenador indicados toman especial importancia (Zheng 1997), (Ahlfeld y Mulligan, 2000), tanto si se usa el método de la matriz de respuestas como el método del "embedding" (Gorelick, 1983). Con el primer método se han de considerar como parte de las restricciones la respuesta en todas las celdas al estímulo unitario

de cada una, proceso que realiza el modelo de flujo. El número de restricciones puede elevarse considerablemente en función de los intervalos de tiempo. Con el segundo método, parte de las restricciones son las aproximaciones de la ecuación diferencial de flujo en cada celda en la que se discretiza el acuífero para cada intervalo de tiempo.

La construcción de modelos que no presenten estos inconvenientes requieren partir de ecuaciones en las que el tiempo se utilice de forma continua o solamente una vez como tiempo total del proceso.

Sahuquillo (1983) presenta una técnica basada en el método de los autovalores para la solución de modelos lineales continuos en el tiempo. Con este método únicamente se discretiza el espacio y se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. La solución es una función explícita continua en el tiempo. Cheng y Ou (1989) aplican la transformada de Laplace para el tratamiento analítico cuasitridimensional del sistema de ecuaciones integrodiferenciales desarrollado por Herrera y Figueroa (1969) y Herrera (1970) para acuíferos semiconfinados y multicapa. Tratamientos posteriores con la transformada de Laplace fueron desarrollados por Cheng y Morohunfola (1990), Morohunfola (1992) y Cheng y Morohunfola (1993 a, b).

Andrés (2003), confecciona un programa para el modelado cuasitridimensional interactivo de flujo y dos programas de gestión hidráulica, aplicables a acuíferos multicapa y, por extensión, a monocapa, con base en el sistema de ecuaciones transformadas de Cheng y Ou (1989). En el mismo trabajo se desarrollan los programas para el modelado del flujo en acuífero libre y en acuífero confinado (MGAC), presentándose aquí este último.

**Ecuaciones y proceso numérico general**

Representando el descenso en los acuíferos como  $s(x, y, t)$ , la ecuación de la continuidad en dos dimensiones es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T^x \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T^y \frac{\partial s}{\partial y} \right) - R = S \frac{\partial s}{\partial t} \tag{1}$$

$T^x$  y  $T^y$  son las componentes de la transmisividad,  $S$  es el coeficiente de almacenamiento constante y  $R$  es la tasa de recarga volumétrica ( $Q$ ) por unidad horizontal de área:

$$R = \frac{-Q}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

Para un sistema no influenciado, la condición inicial es:

$$s(x, y, 0) = 0 \tag{3}$$

Aplicando la transformada de Laplace a (1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T^x \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T^y \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} \right) - \bar{R} = p S \bar{s} \tag{4}$$

La expresión (4) representa una ecuación diferencial parcial de segundo orden en dos dimensiones. Las variables  $\bar{s}$  y  $\bar{R}$  son, respectivamente, los descensos y la tasa de recarga transformados. No aparece la variable tiempo, que se ha sustituido por  $p$ , parámetro de transformación. Esta ecuación se resuelve mediante diferencias finitas a la vez que se desarrolla la inversión numérica, recuperando la variable tiempo en vez de  $p$  para obtener los valores de  $s$  en vez de los de  $\bar{s}$ .

En la aproximación mediante diferencias finitas, las derivadas son reemplazadas por los gradientes entre los nudos, centrados en cada celda cuadrada de la malla en la que se discretiza el acuífero. Para un  $\bar{s}_{i,j}$  genérico en la celda  $(i, j)$ , llamando  $x$  al lado del cuadrado de la celda y  $T$  a la transmisividad constante, queda:

$$\bar{s}_{i,j} = \frac{T(\bar{s}_{i-1,j} + \bar{s}_{i+1,j} + \bar{s}_{i,j-1} + \bar{s}_{i,j+1}) - x^2 \bar{R}_{i,j}}{4T + x^2 S p} \tag{5}$$

Sustituyendo:

$$\bar{R}_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{p} \tag{6}$$

y

$$R_{i,j} = \frac{-Q_{i,j}}{x^2} \tag{7}$$

en (5), se obtiene para acuífero homogéneo:

$$\bar{s}_{i,j} = \frac{T(\bar{s}_{i-1,j} + \bar{s}_{i+1,j} + \bar{s}_{i,j-1} + \bar{s}_{i,j+1}) + \frac{Q_{i,j}}{p}}{4T + x^2 S p} \tag{8}$$

siendo  $Q_{i,j}$  el caudal extraído (positivo) o recargado (negativo) en la celda  $(i, j)$ .

Para poder considerar heterogeneidad en el acuífero, las transmisividades que se aplican en cada celda  $(i, j)$  están en función de las colindantes (izquierda  $T_l(i, j)$ , derecha  $T_d(i, j)$ , arriba  $T_a(i, j)$ , abajo  $T_b(i, j)$ , obtenidas mediante la media harmónica, de expresión general  $T(i, j)$ :

$$T(i, j) = \frac{x}{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = \frac{x}{T(\text{propia}) + T(\text{colindante})} \tag{9}$$

siendo  $T_{(propia)}$  y  $T_{(colindante)}$  la transmisividad de la celda propia o colindante indicada respectivamente y  $x$ , la longitud del lado de la celda. La ecuación en diferencias finitas de la transformada de la ecuación del flujo queda:

$$\bar{s}_{i,j} = \frac{T_{l(i,j)}\bar{s}_{i-1,j} + T_{d(i,j)}\bar{s}_{i+1,j} + T_{a(i,j)}\bar{s}_{i,j-1} + T_{b(i,j)}\bar{s}_{i,j+1} - x^2\bar{R}_{(i,j)}}{(T_{l(i,j)} + T_{d(i,j)} + T_{a(i,j)} + T_{b(i,j)}) + x^2S_{(i,j)}} \tag{10}$$

Sustituyendo (6) y (7) en (10):

$$\bar{s}_{i,j} = \frac{T_{l(i,j)}\bar{s}_{i-1,j} + T_{d(i,j)}\bar{s}_{i+1,j} + T_{a(i,j)}\bar{s}_{i,j-1} + T_{b(i,j)}\bar{s}_{i,j+1} + \frac{Q_{i,j}}{p}}{(T_{l(i,j)} + T_{d(i,j)} + T_{a(i,j)} + T_{b(i,j)}) + x^2S_{(i,j)}} \tag{11}$$

siendo  $S_{(i,j)}$  el coeficiente de almacenamiento de cada celda.

La solución del sistema resultante se realiza mediante el método iterativo de SOR.

Existen múltiples aproximaciones para la inversión de la transformada de Laplace, como se detalla en Piessens (1975), Piessens y Dang (1976) y Cheng *et al.* (1994) entre otros. El método de inversión utilizado es el de Stehfest (1970). La solución en el tiempo es:

$$F(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^N C_n \bar{F}\left(\frac{n \ln 2}{t}\right) \tag{12}$$

con el coeficiente  $C_n$  definido como:

$$C_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\frac{(n+1)}{2}}^{\min\left(\frac{n}{2}, \frac{N}{2}\right)} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!} \tag{13}$$

El valor de  $k$  en el sumatorio que define  $C_n$  es siempre el del entero por defecto en el caso de que  $n$  sea par.

El número de términos  $N$  en la serie es par, aumentando la precisión con  $N$  (Stehfest, 1970). Cheng *et al.* (1994) pusieron de manifiesto que para valores de  $N$  de 20 en adelante, la convergencia se deteriora y la precisión disminuye. Este valor está limitado por los decimales utilizables (Andrés, 2003), recomendando el valor de 18 si se trabaja con doble precisión, aumentando el error por truncación para valores superiores.

### Programa

Las distintas partes del programa MGAC se especifican a continuación:

- 1.- Definición de los parámetros.
- 2.- Declaración y dimensionado de una malla de celdas cuadradas.
- 3.- Subrutina VALGENC: Asignación de los parámetros generales del modelo. (Número de columnas y de filas para conformar un acuífero cuadrado o rectangular, longitud del lado de la celda, transmisividad y coeficiente de almacenamiento). Se han de considerar celdas exteriores como auxiliares, no pertenecientes propiamente al acuífero, pero han de tenerse en cuenta en el dimensionamiento. Los parámetros del modelo pueden ser introducidos desde un fichero de texto, o de forma interactiva introduciéndolos con el teclado.
- 4.- Subrutina VALPARC: Asignación de transmisividad y coeficiente de almacenamiento a celdas particulares, si existe alguna con valores diferentes a los generales. Cuando hay heterogeneidad de la conductividad hidráulica en vertical en alguna celda se toma el valor en la horizontal determinado por la media aritmética ponderada; si la heterogeneidad es en horizontal se aproxima con la media harmónica.
- El contorno preciso del acuífero se realiza mediante celdas inactivas con la asignación de una transmisividad muy baja que no puede ser nula.
- 5.- Subrutina ITCECAC: Igualado de la transmisividad de las celdas exteriores auxiliares con las adyacentes. Ello es necesario para que en la subrutina TCCC se asigne su propio valor a las celdas externas del acuífero.
- 6.- Subrutina TCCC: Obtención de la transmisividad aplicable a cada dos celdas contiguas mediante la aplicación de la media harmónica (9).
- 7.- Asignación del número de bombeos o recargas, totales o parciales. Para cada uno se asigna la celda correspondiente, el caudal, la duración y el

diámetro del pozo. La obtención de los descensos se realiza sucesivamente para cada bombeo o recarga, total o parcial. Mediante convolución se trata el bombeo a caudal variable, pudiendo tratar recuperaciones. La expresión general del descenso o ascenso total  $s_t$  partiendo de los descensos o ascensos parciales  $s_n$  es:

$$s_t = s_0(Q_0, t) + s_1(\Delta Q_1, t - t_1) + s_2(\Delta Q_2, t - t_2) + \dots + s_n(\Delta Q_n, t - t_n) \quad (14)$$

siendo  $Q_n$  el caudal parcial de duración  $t - t_n$ , donde  $t$  es el total de la duración desde el comienzo del primer bombeo o inyección ( $-Q_n$ ) hasta el final del último bombeo o recuperación y  $t_n$  el tiempo que transcurre desde el comienzo del primer bombeo hasta el comienzo del bombeo o recuperación parcial de caudal  $\Delta Q_n$ , incremento o decremento con respecto al caudal parcial anterior. Se pueden considerar tantos bombeos, inyecciones y recuperaciones como se quiera, en el espacio y en el tiempo.

Los niveles en las celdas de bombeo o recarga tienen un descenso (ascenso) adicional,  $H_a$ , que se obtiene considerando el diámetro del pozo ( $d_p$ ), el lado de la celda ( $d_x$ ), el caudal ( $Q$ ) y la transmisividad ( $T$ ). La expresión de la corrección (Prickett, 1967; Thiery *et al.*, 1995) es:

$$H_d = \frac{Q}{2\pi T} \left[ L_n \left( \frac{d_x}{d_p} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (15)$$

pudiendo también introducir las pérdidas de carga en las captaciones si hay datos de ensayos escalonados. En el caso de celdas en las que entra o sale agua sin captación (por recarga lateral de lluvia o desde masas de agua superficial en comunicación con el acuífero, por gradiente constante, por drenaje natural, por evapotranspiración, etc.) el proceso se trata como un bombeo o inyección en la celda, pero no se considera descenso o ascenso adicional; ello se realiza asignando a estas celdas un radio efectivo  $r_w$  que puede calcularse (Prickett, 1967) como:

$$r_w = \frac{d_x}{4.81} \quad (16)$$

siendo  $d_x$  el lado de la malla en metros; el valor  $d_p$  en (15) sería el doble de  $r_w$ .

Si en alguna de estas celdas existe además bombeo o inyección real, se consignan los caudales

por separado con su radio y tiempo correspondiente.

8.- Subrutina SUMSTEHC: Aplicación del algoritmo de Stehfest para la obtención de cada uno de los 18 sumandos referidos a cada caudal parcial de cada bombeo, inyección o recuperación. Los potenciales iniciales de todas las celdas son iguales (descenso inicial nulo), asignados mediante una sentencia DATA. Se asumen, de entrada, bordes impermeables mediante gradiente nulo, igualando continuamente en el proceso iterativo que tiene lugar para alcanzar la precisión deseada, los descensos de las celdas exteriores auxiliares con los de las adyacentes. Los bordes de gradiente fijo se consiguen asignando a las celdas correspondientes caudales de inyección según la ley de Darcy. No se pueden definir niveles constantes; solo los de descenso cero, utilizando sentencias de asignación directa. Casos particulares de nivel constante se consideran los ríos conectados de forma continua con el acuífero

9.- Subrutina MDR: Obtención de la matriz del sumatorio de cada uno de los 18 términos del algoritmo de Stehfest, referidos a cada caudal parcial y considerando el diámetro de la captación ( $d_p$ ), mediante lo que se obtiene un descenso o ascenso adicional,  $H_a$ , en las celdas de bombeo tal y como se expresa en la ecuación (15), y de la matriz definitiva de los descensos del nivel piezométrico en el acuífero para el tiempo total deseado.

La subrutinas SUMSTEHC y MDR son el núcleo del programa y responden a la necesidad de seguir las pautas que marca el algoritmo de Stehfest, (12) y (13) con un sumatorio de  $N=18$  términos.

Con la subrutina SUMSTEHC, se aplican, para cada uno de los 18 términos, diferencias finitas (11) y el método de SOR para obtener la matriz correspondiente a la expresión  $\bar{F}(n \ln 2/t)$ , siendo  $\bar{F}$ , la matriz de la transformada de los descensos del nivel piezométrico ( $\bar{s}$ ) para  $p=(\ln 2/t)$  y  $n=1, \dots, N$ , siendo  $p$  el parámetro de transformación,  $t$ , el tiempo total de duración de la extracción o inyección y  $n$ , el número de orden correspondiente al sumando.

El proceso se repite iterativamente. En cada iteración se obtiene una matriz y se evalúa la diferencia mayor entre el antiguo y el nuevo valor de entre los de todas las celdas. Las iteraciones cesan cuando el número de cifras significativas de la diferencia supera las posibles según la precisión con la que se trabaja. La precisión establecida en los programas ha sido la máxima posible en función del número máximo de 15 cifras significativas con las que se trabaja en doble precisión.

La obtención de la matriz definitiva de cada término  $n=1, \dots, N$ , se obtiene multiplicando la matriz obtenida por el valor correspondiente de  $C_n(13)$ .

Los valores de  $C_n$  se han elaborado para cada  $n$  ( $n$ , entre 1 y  $N$ ), y  $N$  ( $N$ , par entre 2 y 18) utilizando el programa Mathematica (Wolfram, 1991).

Con la subrutina MDR se compone la matriz suma de las  $N$  matrices obtenidas, hallándose la matriz definitiva de los descensos mediante el producto de la matriz suma y el parámetro de transformación  $p=(\ln 2/t)$ , que está en función del tiempo de duración parcial de la extracción o inyección.

En la modelación no existe límite de descenso, por lo que todo bombeo es factible. Su posibilidad efectiva ha de ser evaluada externamente considerando los potenciales iniciales.

La programación básica del método de SOR ha sido extraída de Wang y Anderson (1982). El parámetro de relajación se ha obtenido mediante prueba y error llegando a un valor de 1,47.

10.- Salida de resultados definitivos en forma de matriz de descensos. La salida se visualiza en un editor de texto.

El programa se ha escrito en FORTRAN 90 con Intel (R) Fortran Compiler 8.0.

### Tiempos de CPU y memoria requerida

El equipo utilizado ha sido AMD x86\_64 3200+ con 1 GB de RAM y 200 GB de disco duro.

1) Tiempos de CPU.

Se ha contado el tiempo hasta el final de la computación, no cronometrando el tiempo que transcurre en la edición de los resultados, que es prácticamente inmediata.

Ha de considerarse que los tratamientos se han realizado en doble precisión.

Los parámetros usados en los ejemplos han sido: lado de las celdas=100 m, transmisividad=250 m<sup>2</sup>/d, coeficiente de almacenamiento=0,001, factor de relajación=1,47, caudal=1000 m<sup>3</sup>/d. En el acuífero heterogéneo se han considerado un total de 586 celdas con valores de transmisividad y coeficiente de almacenamiento distintos a los generales.

a) Acuífero confinado homogéneo de 14 x 14 celdas.

Bombeo	10 días	120 días
t	< 1 seg	10 seg.

b) Acuífero confinado homogéneo de 52 x 52 celdas.

Bombeo	10 días	120 días
t	15 seg	2 min. 26 seg.

c) Acuífero confinado heterogéneo de 52 x 52 celdas.

Bombeo	10 días	120 días
t	23 seg	3 min. 46 seg.

2) Memoria requerida para cualquier tiempo.

Tipo de acuífero	Memoria.
Confinado homogéneo de 14x14 celdas	1037 Kb
Confinado homogéneo de 52x52 celdas	1075 Kb
Confinado heterogéneo de 52x52 celdas	1162 Kb

### Validez de los modelos y limitaciones

La expresión de la transformada de Laplace de los descensos para acuífero confinado es (Cheng y Morohunfola, 1993a):

$$\bar{s} = \frac{Q}{2\pi p T} K_0 \left[ r \left( \frac{pS}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (17)$$

siendo  $K_0$  la función modificada de Bessel de segunda especie de orden cero y  $p$ , el parámetro de transformación. La inversa de la transformada es la solución de Theis (1935).

$$s = \frac{Q}{4\pi T} E_i \left[ \frac{r^2 S}{4Tt} \right] \quad (18)$$

siendo  $E_i$  la función de pozo.

La comparación de los valores a los que se llega con la inversión aproximada mediante el método de Stehfest de la expresión (17) y los que se obtienen con la expresión (18) muestra (Figura 1) la concordancia para los valores de  $Tt/r^2S$  superiores a 0,02 de la Tabla 1. En la Figura 2 se puede observar con mayor detalle en términos de error relativo para valores entre 0,04 y 0,2.

Peng-Hsiang, y Tien-Chang (1998) mostraron los errores relativos para un intervalo mas amplio cuando se usa el método de inversión de Stehfest para aproximar la función de pozo de Theis.

En la Figura 3 se comparan los valores obtenidos con un modelo de acuífero limitado genérico con los de la expresión analítica de la inversión para valores de  $Tt/r^2S$  superiores a 1. Se refleja la concordancia y la progresiva diferencia con el tiempo, como corresponde al comparar los valores de un modelo de acuífero limitado y los obtenidos con la expresión para uno infinito.

Los cálculos se han realizado con el programa

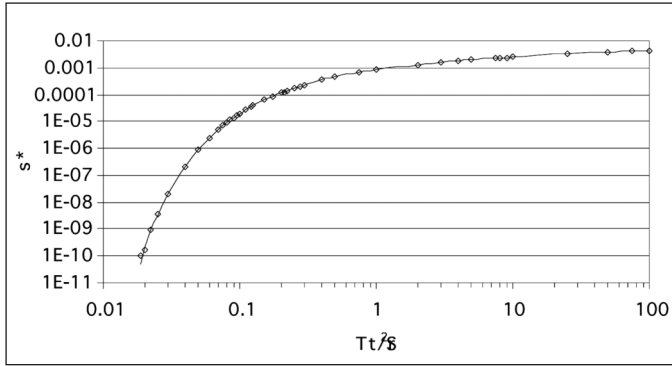


Figura 1. Relación entre la inversión aproximada de la expresión analítica transformada (puntos) y la ecuación de Theis (línea).  
 Figure 1. Relation of the approximate inversion of the transformed analytical expression (dots) and the Theis equation (line).

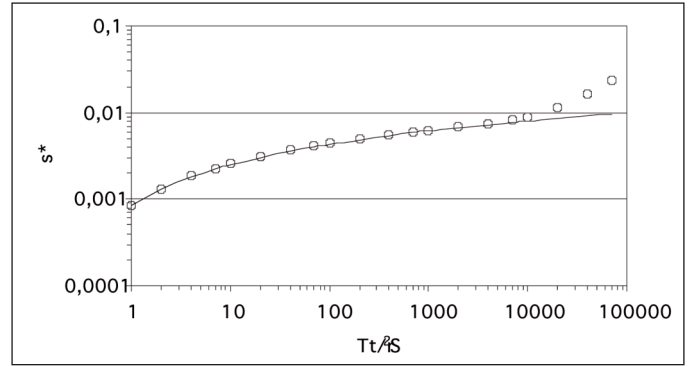


Fig. 3. Relación entre la solución del modelo (puntos) y la inversión aproximada de la expresión analítica transformada (línea) para  $Tt/R^2S > 1$ .  
 Fig. 3. Relation of the model solution (dots) and the approximate inversion of the transformed analytical expression (line) for  $Tt/R^2S > 1$ .

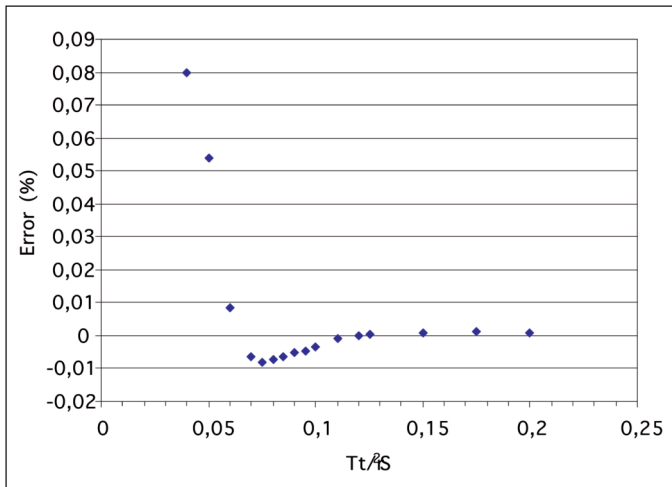


Figura 2. Error relativo del descenso obtenido usando la inversión aproximada de la expresión analítica transformada y la ecuación de Theis para valores de  $Tt/R^2S$  entre 0,04 y 0,2.  
 Figure 2. Relative error of the drawdown obtained using the approximate inversion of the transformed analytical expression and the Theis equation for  $Tt/R^2S$  values between 0,04 and 0,2.

*Mathematica* (Wolfram, 1991) tal como se muestra en Cheng *et al.* (1994), utilizando 18 términos de inversión.

El uso del método de Stehfest, (Stehfest, 1970) conlleva un error para valores de  $Tt/r^2S$  pequeños, tal como se pone de manifiesto en Cheng y Ou (1989) para acuíferos multicapa, llevando a valores de descenso negativos en gran número de casos al utilizar el presente programa (Andrés, 2003).

La Tabla 1 muestra para un intervalo de valores de  $Tt/r^2S$  entre 0,0175 y 100 una fluctuación y unos errores relativos a considerar para valores menores de 0.06.

Para un valor  $Tt/r^2S$  de 0,06, en un acuífero de radio  $r$ , teniendo como centro una celda de bombeo, se daría un error relativo máximo en los descensos de 0,0085 % en las celdas externas situadas a esa distancia  $r$ , es decir, 8,5 mm cada 100 m. Considerando ese límite como error máximo admisible, para un valor de  $T=100$  m<sup>2</sup>/día y de  $S=0,0001$  y bombeo de 1 día, el modelo solo se podría aplicar a acuíferos de hasta 4082 m de distancia del punto de bombeo. Un acuífero con esa medida y esos parámetros sólo puede ser tratado para tiempos de bombeo iguales o mayores de 1 día.

Un acuífero de 10000 m de radio podría ser tratado solamente para un tiempo superior a seis días.

Un tiempo menor no implica precisión para celdas interiores, pues la interrelación entre las celdas que conlleva el método de SOR arrastra siempre un error, aunque en disminución, hacia el punto de bombeo.

Para evaluar las limitaciones en el caso de heterogeneidad de  $T$  y  $S$  pueden tomarse en consideración los métodos de promediado y escalado analizados en Matheron (1967), Lachassagne *et al.* (1989), Desbarats (1992), Gómez-Hernández *et al.* (1995), Sánchez-Vila *et al.* (1996) y de Marsily *et al.* (2005) entre otros, aunque ello ha de ser objeto de ulteriores investigaciones.

Otras limitaciones son:

- Los descensos iniciales de todas las celdas son nulos. La asignación de potenciales iniciales y de potenciales fijos distintos no es posible, dado que los modelos trabajan con las transformadas de los descensos. Si se asume el error que conlleva, los valores distintos pueden tratarse opcionalmente considerando los potenciales iniciales o fijos rea-

$Tt/R^2S$	Error relativo %	$Tt/R^2S$	Error relativo %
100	-	0,175	0,0013
75	-	0,150	-0,00096
50	-	0,125	-0,00051
25	-	0,12	-
10	-	0,11	-0,0011
9	-	0,1	-0,0035
8	0,00043	0,095	-0,0048
7,5	-	0,09	-0,0051
5	-	0,085	-0,0063
1	-0,00012	0,08	-0,0074
0,75	-	0,075	-0,0081
0,5	-	0,07	-0,0063
0,4	-	0,06	0,0085
0,3	-0,00043	0,05	0,054
0,275	-	0,04	0,08
0,250	-	0,03	-0,99
0,225	-	0,025	-2,78
0,22	-	0,0225	-0,27
0,21	-	0,02	23,74
0,2	0,00086	0,0175	> 99

Tabla 1. Relación entre los valores de  $Tt/R^2S$  y el error relativo del descenso obtenido usando la inversión aproximada de la expresión analítica transformada y la ecuación de Theis.

Table 1. Relation of the values and the relative error of the drawdown obtained using the approximate inversion of the transformed analytical expression and the Theis equation.

les de las celdas en una subrutina (MDP) en la que se obtiene la matriz definitiva, esta vez de potenciales, mediante la diferencia con los descensos obtenidos a partir de los valores iniciales o fijos de descenso nulo.

Los potenciales reales de partida se asignan en la subrutina mediante sentencias de asignación directa o, en su caso, captando la matriz de valores de potencial resultante de una situación en régimen permanente, en la que los valores iniciales pueden ser tratados directamente con facilidad mediante una subrutina opcional (REGPERC) del programa principal, que no se detalla en el presente trabajo.

- La calibración en régimen transitorio sólo es posible desarrollando el procedimiento anterior. En régimen permanente este no se necesita, llevándose a cabo mediante la mencionada subrutina REGPERC. Se pueden analizar condiciones iniciales y de contorno, recarga y distribución de transmisividades, comparando con mapas históricos de curvas isopiezométricas de la región y, en caso de

régimen variable, con datos históricos de bombeo.

- El número de cifras significativas al trabajar con doble precisión está limitado a 15, lo que causa una truncación en el valor de cada uno de los 18 parámetros C de Stehfest y de los valores que se van obteniendo en el proceso. Las sumas y restas alternativas y las operaciones que tienen lugar en la subrutina MDR a partir de los valores obtenidos con la subrutina SUMSTEHC, producen errores, aunque, normalmente, a partir de una cifra decimal poco o nada relevante. Estos errores se manifiestan principalmente en algunos casos en los que hay recuperación de niveles. El uso de cuádruple precisión produce errores irrelevantes, aunque, con ello, se aumenta el tiempo de ordenador y la memoria.

### Conclusiones

El tratamiento con la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de flujo de acuífero confinado da

como resultado una ecuación diferencial transformada que se ha tomado como base para la confección de un programa para la modelización de estos acuíferos (MGAC). Al ser sustituida en la transformación la variable tiempo por el parámetro de inversión  $p$ , los modelos no requieren discretización temporal, ofreciendo rapidez y ahorro de memoria y una gran precisión para tiempos medios y largos de modelado.

El núcleo del programa lo constituyen dos subrutinas y responden a la necesidad de seguir las pautas que marca el algoritmo de Stehfest, que es el utilizado para la inversión aproximada de la transformada, con un sumatorio de 18 términos.

La utilización de este método de inversión conlleva errores en modelos con valores pequeños de  $Tt/r^2S$ , habiéndose cuantificado estos en acuífero homogéneo. Otra fuente de error reside en la truncación de los 18 parámetros  $C$  de Stehfest, al trabajar con doble precisión, haciéndose evidente en algunos problemas con recuperación de niveles. Trabajando con cuádruple precisión estos errores prácticamente se eliminan pero aumenta la memoria requerida y el tiempo de ordenador.

Otras limitaciones provienen de tener que partir, en régimen transitorio, de potenciales iguales en todas las celdas, no pudiéndose establecer gradientes iniciales naturales, por lo que tampoco se puede calibrar. Las celdas y bordes de nivel constante y masas de agua, tienen el mismo potencial inicial que el acuífero y solo se les puede asignar un descenso fijo nulo en el proceso. Estas limitaciones no se dan en régimen permanente.

Potenciales iniciales o fijos distintos pueden, no obstante, considerarse y restar de ellos los descensos obtenidos a partir de los valores iniciales o fijos de descenso homogéneo nulo, aunque ha de asumirse el error que ello conlleva.

## Agradecimiento

El Comité de Redacción del Boletín Geológico y Minero desea agradecer la colaboración del Dr. Javier Sánchez, compañero del autor fallecido, en la corrección y revisión del texto, dando continuidad al proceso editorial del artículo. Sirva esta publicación como homenaje póstumo a su memoria y su obra.

## Referencias

Ahlfeld D.P. and Mulligan A.E. 2000. *Optimal Management of Flow in Ground water Systems*. Academic Press. San Diego

- Andrés M.F. 2003. *Modelos de flujo y de gestión hidráulica de acuíferos. Simulación cuasitridimensional sin iteraciones temporales*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca. 625 p.
- Cheng A.H-D. and Ou K. 1989. An efficient Laplace transform solution for multiaquifer systems. *Water Resources Research*, 25(4), 742-748.
- Cheng A.H-D. and Morohunfola O. 1990. Boundary element formulation for multiaquifer systems. In *Computational Engineering with Boundary Elements, vol. I. Fluid and Potential Problems*, edited by S. Grilli, C. A. Brebbia, and A.. H-D. Cheng, p. 145-156, Computational Mechanics Publications, Billerica, Mass.
- Cheng A.H-D. and Morohunfola O.K. 1993a. Multilayered leaky aquifer systems. I. Pumping Well Solution. *Water Resources Research*, 29(8), 2787-2800.
- Cheng A.H-D. and Morohunfola O.K. 1993b. Multilayered leaky aquifer systems, II, Boundary element solutions, *Water Resources Research*, 29(8), 2801-2811.
- Cheng A.H.D., Sidauruk P. and Abousleiman Y. 1994. Approximate Inversion of the Laplace Transform. *The Mathematica Journal*, 4(2), 76-82.
- De Marsily G., Delay F., Gonçalves J., Renard P., Teles V. and Violette S. 2005. Dealing with spatial heterogeneity. *Hydrogeology Journal*, 13(1), 161- 183.
- Desbarats A.J. 1992. Spatial averaging of the transmissivity in heterogeneous fields with flow toward a well. *Water Resources Research*, 27(5), 667-698.
- Gómez-Hernández J.J, Sovero H. and Sahuquillo A. 1995. Some issues on the analysis of pumping test in heterogeneous aquifers. *Hydrogeologie*, 3, 13-18.
- Gorelick S.M. 1983. A review of distributed parameter groundwater management modeling methods. *Water Resources Research*, 19(2), 305-319.
- Herrera I. and Figueroa G.E. 1969. A correspondence principle for the theory of leaky aquifers. *Water Resources Research*, 5(4), 900-904.
- Herrera I. 1970. Theory of multiple leaky aquifers. *Water Resources Research*, 6(1), 185-193.
- Lachassagne P., Ledoux E. and de Marsily G. 1989. Evaluation of hydrogeological parameters in heterogeneous porous media. *Groundwater Management: Quantity and Quality*. IAHS Publ. n° 188. 3-18.
- Matheron G. 1967. Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène e de Schwydler et règles de pondération. *Révue de l'Institut Français du Pétrole*, 3, XXII, 443-446.
- Morohunfola O.K. 1992. *Analytical and numerical solutions for multiple leaky aquifer systems*. Ph. D. dissertation. Univ. of Delaware, Newark.
- Peng-Hsiang T. and Tien-Chang L. 1998. Numerical evaluation of exponential integral: Theis well function approximation. *Journal of Hydrology*, 205(1-2), 38-51.
- Piessens R. 1975. A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1, 115-126.
- Piessens R. and Dang N.D.P. 1976. A bibliography on



- numerical inversion of the Laplace transform and applications: A supplement, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2, 225-228.
- Prickett T.A. 1967. Designing pumped well characteristics into electric analog model. *Ground Water*, 5(4), 38-46.
- Sahuquillo A. 1983. An Eigenvalue Numerical Technique for Solving Unsteady Linear Groundwater Models Continuously in Time. *Water Resources Research*, 19(1), 87-93.
- Sánchez-Vila X., Carrera J., Jorge P. and Girardi J.P. 1996. Scale effects in transmissivity. *Journal of Hydrology*, 183(1-2), 1-22.
- Stehfest H. 1970. Numerical inversion of Laplace transforms. *Communications of the ACM.*, 13 (1), 47-49.
- Theis C.V. 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. *Transactions American Geophysical Union Annual Meeting*, 16<sup>th</sup>, 519- 524.
- Thiery D., Schwartz J., Berge J., Fotoohi F., Konstantopedos K. and Lambert M. 1995. Un système d'aide à la gestion des ressources en eaux souterraines. Application au site de Bordeaux. *Hydrogeologie*, 1, 129-139.
- Wang H.F. and Anderson M.P. 1982. *Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods*. W.H. Freeman and Co., N. York
- Wolfram S. 1991. *Mathematica. A System for doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley Pub.Co. 2<sup>nd</sup> ed. N York.
- Zheng, C. 1997. *ModGA, Documentation and User's Guide*, Technical Report to DuPont Company, Hydrogeology Group, Univ. of Alabama.

Recibido: marzo 2007

Aceptado: diciembre 2008

